Dynamika tuhých telies a rovnice pohybu

Tuhé teleso je také, ktorého tvar sa nikdy počas simulácie nezdeformuje. Kvôli tuhosti je celkový pohyb telesa zložený z lineárneho pohybu ťažiska telesa a z rotácie telesa okolo svojho ťažiska.

1 Rovnica pohybu

Rovnicu pohybu tuhých telies s neobmedzeným pohybom môžeme zhrnúť do nasledovnej ODE rovnice:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \\ \boldsymbol{P}(t) \\ \boldsymbol{L}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}(t) \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\omega}(t) \\ \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{\tau}(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P}(t) \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{J}^{-1}(t)\boldsymbol{L}(t) \qquad \boldsymbol{J}^{-1}(t) = \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{J}_0^{-1}\boldsymbol{R}^T(t)$$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{pmatrix} +\boldsymbol{q}_{w(t)} & -\boldsymbol{q}_{z(t)} & +\boldsymbol{q}_{y(t)} \\ +\boldsymbol{q}_{z(t)} & +\boldsymbol{q}_{w(t)} & -\boldsymbol{q}_{x(t)} \\ -\boldsymbol{q}_{y(t)} & +\boldsymbol{q}_{x(t)} & +\boldsymbol{q}_{w(t)} \\ -\boldsymbol{q}_{x(t)} & -\boldsymbol{q}_{y(t)} & -\boldsymbol{q}_{z(t)} \end{pmatrix}$$

Atribúty tuhých telies:

Poloha		**Rozloženie hmotnosti**	
Pozícia Orientácia	$c(t) \in R^{3x1}$ $q(t) \in R^{4x1}$	Hmotnosť Inerčný tenzor	$M(t) \in R^{1x1}$ $J(t) \in R^{3x3}$
Pohyb		**Hybnosti**	
Lineárna rýchlosť Uhlová rýchlosť	$v(t) \in R^{3x1}$ $\omega(t) \in R^{3x1}$	Lineárna hybnosť Uhlová hybnosť	$P(t) \in R^{3x1}$ $L(t) \in R^{3x1}$
Zrýchlenie		**Sily**	
Lineárne zrýchlenie Uhlové zrýchlenie	$a(t) \in R^{3x1}$ $\alpha(t) \in R^{3x1}$	Sila Krútiaci moment	$f(t) \in R^{3x1}$ $\tau(t) \in R^{3x1}$

2 Rýchlosť

Rýchlosť je deriváciou pozície podľa času:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{c}'(t) = \frac{dc(t)}{dt}$$

3 Zrýchlenie

Zrýchlenie je definované ako derivácia rýchlosti podľa času:

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t) = (\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P})' = \ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}$$

Kde $\boldsymbol{f}$ je sila definovaná ako derivácia lineárnej hybnosti $\boldsymbol{P}$ podľa času**.**

4 Uhlová rýchlosť

Uhlová rýchlosť je vector rovnobežný s osou rotácie, ktorého dĺžka je rovná rýchlosti rotácie. Rýchlosť rotácie je počet radiánov otočenia okolo osi za sekundu.

$$\boldsymbol{q}'(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\omega}(t)$$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{pmatrix} +\boldsymbol{q}_{w(t)} & -\boldsymbol{q}_{z(t)} & +\boldsymbol{q}_{y(t)} \\ +\boldsymbol{q}_{z(t)} & +\boldsymbol{q}_{w(t)} & -\boldsymbol{q}_{x(t)} \\ -\boldsymbol{q}_{y(t)} & +\boldsymbol{q}_{x(t)} & +\boldsymbol{q}_{w(t)} \\ -\boldsymbol{q}_{x(t)} & -\boldsymbol{q}_{y(t)} & -\boldsymbol{q}_{z(t)} \end{pmatrix}$$

5 Uhlové zrýchlenie

Uhlové zrýchlenie je definované ako derivácia uhlovej rýchlosti podľa času:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\omega}'(t) = (\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{L})' = \boldsymbol{J}'^{-1}\boldsymbol{L} + \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{L}' = -\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\omega} \ \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau}$$

Kde $\boldsymbol{\tau}$ je krútiací moment definovaný ako derivácia uhlovej hybnosti $\boldsymbol{L}$ podľa času.

6 Matica inercie

Ak tuhé teleso pokladáme za množinu častíc s polohami $\boldsymbol{p}_i$ a hmotnosťami $\boldsymbol{m_i}$ tak ťažisko telesa je definované ako:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\sum \boldsymbol{m}_i \, \boldsymbol{p_i}}{\boldsymbol{M}} \qquad \boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{m_i}$$

Kde $\boldsymbol{M}$ je celková hmotnosť telesa.

Relatívna poloha i-tej častice je potom $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{r}_i$ a absolutná poloha je $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_{0i}$, kde $\boldsymbol{R}$ zodpovedá matici rotácie a $\boldsymbol{r}_{0i}$ je poloha i-tej častice na začiatku.

Inerčný tenzor $\boldsymbol{J}$ potom vieme definovať ako:

$$\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{m}_i$$

$$\boldsymbol{J} = -\sum \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{r}_i^{\times} \boldsymbol{r}_i^{\times} = \sum \boldsymbol{m}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{iy}^2 + \boldsymbol{r}_{iz}^2 & -\boldsymbol{r}_{ix}\boldsymbol{r}_{iy} & -\boldsymbol{r}_{ix}\boldsymbol{r}_{iz} \\ -\boldsymbol{r}_{iy}\boldsymbol{r}_{iz} & \boldsymbol{r}_{ix}^2 + \boldsymbol{r}_{iz}^2 & -\boldsymbol{r}_{iy}\boldsymbol{r}_{iz} \\ -\boldsymbol{r}_{iz}\boldsymbol{r}_{ix} & -\boldsymbol{r}_{iz}\boldsymbol{r}_{iy} & \boldsymbol{r}_{ix}^2 + \boldsymbol{r}_{iy}^2 \end{pmatrix}$$

Narozdiel od skalárnej hmotnosti $\boldsymbol{M}$**,** inerčný tenzor $\boldsymbol{J}$ je závislý na čase.

Označenie $\boldsymbol{r}^{\times}$ značí antisymetrickú maticu vektorového súčinu:

$$\boldsymbol{r}^{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{a}_z & +\boldsymbol{a}_y \\ +\boldsymbol{a}_z & 0 & -\boldsymbol{a}_x \\ -\boldsymbol{a}_y & +\boldsymbol{a}_x & 0 \end{pmatrix}$$

Na rozdiel od hmotnosti je inerčný senzor závislý od času. Keďže teleso sa nikdy nedeformuje, môžeme výpočet inerčného tenzora iba na začiatku a jeho zmenu odpočítavať pomocou matice rotácie.

$$\boldsymbol{J}_0 = -\sum \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{r}_{0i}^{\times} \boldsymbol{r}_{0i}^{\times} \qquad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{J}_0\boldsymbol{R}^T \qquad \boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{J}_0^{-1}\boldsymbol{R}^T$$